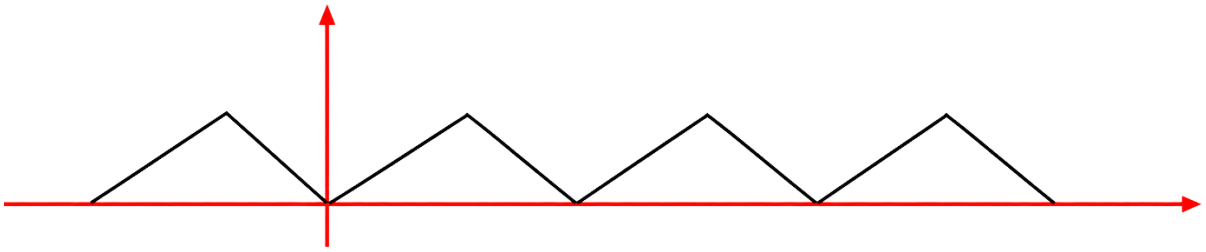
مثلثات دوازدهم

## بخش پنجم : رسم توابع مثلثاتی و توابع متناوب

### تابع متناوب:

- **تابعی است که بخشی از نمودار به صورت افقی تکرار می شود.**
- **تابع $y = f(x)$ را متناوب با دوره تناوب $T$ می گوییم اگر به ازای هر $x$ در دامنه تابع داشته باشیم:**

$$f(x + T) = f(x)$$



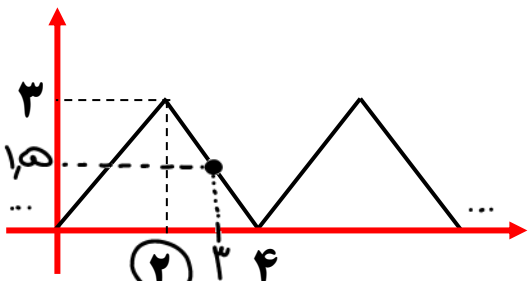
**دوره متناوب ($T > 0$) : طول کوچکترین بخشی از نمودار است که تکرار می شود.**

- **دامنه توابع متناوب تا مثبت و منفی بینهایت ادامه دارد.**
- **اگر تابعی دارای توابع $T$ باشد، اگر به $x$ ها به اندازه $T$ اضافه یا کم کنیم مقدار تابع تغییری نمی کند یعنی،**

$$f(x \pm nT) = f(x)$$

۷۴- اگر تابع $f(x)$ به صورت روبرو باشد و دوره تناوب آن برابر ۴ باشد حاصل $f(۱۰) + f(۱۳۹۹)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵




$$\begin{cases} f(10) = f(2) = 3 \\ f(1399) = f(3) = 1/5 \end{cases}$$

۱۰ | ۴ / ۲ → ۸ → ②

۱۳۹۹ | ۴ / ۳۴۹ → ۱۲ → ۱۹ → ۱۶ → ۳۹ → ۳۶ → ③

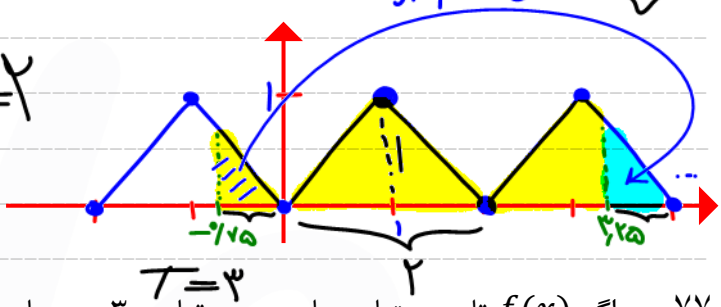
تلفیقی : ۵۰ الی ۸۵ ← ترکیبی ← بسیل + اخارصی دهم ← مقدماتی

۷۵- اگر $f$ متناوب با دوره تناوب ۴ باشد و $f(x)=x^2$ برای $-2\le x<2$ حاصل $f(40)+f(23)+f(17)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۳

۷۶- تابعی متناوب $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x\le 2 \end{cases}$ را که دوره ی تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیه محصور به منحنی $f$ و محور $x$ ها در بازه $[-0/75, 3/25]$ کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۰)

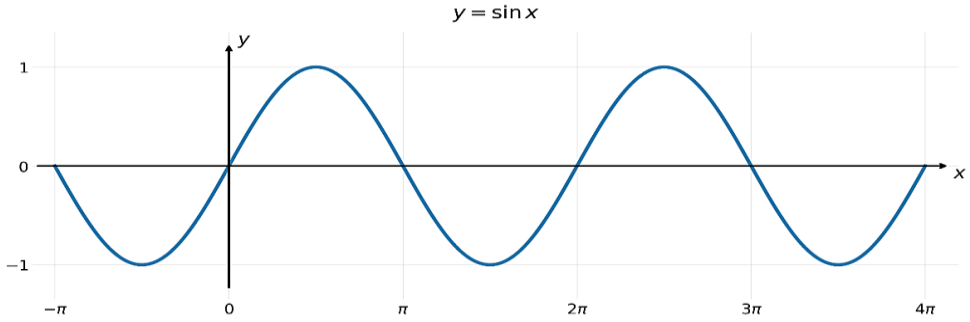
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴



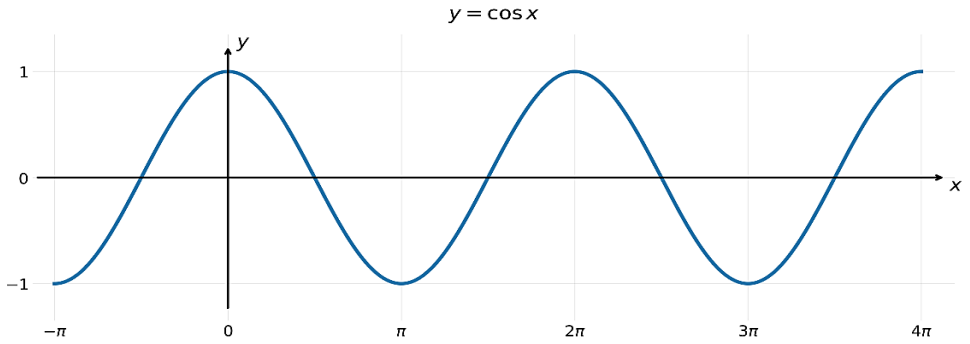

۷۷- اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دوره ی تناوب ۳ و در بازه ی $[-1,2)$ به صورت $f(x)=-2|x|+1$ باشد، مقدار عددی $f(32)+f(25)$ کدام است؟

۱) $-2$ ۲) $-4$ ۳) $-6$ ۴) ۰

- **تابع** $y = \sin x$




- **تابع** $y = \cos x$




۷۸- دوره تناوب، ماکسیمم و مینیمم توابع $y = \sin x$ ، $y = \sin 2x$ و $y = 2 \sin x$ را بیابید.

## ماکسیمم و مینیمم و دوره تناوب

$$y = A\cos Bx + C \qquad y = A \sin Bx + C$$

**نکته: محاسبه ماکسیمم و مینیمم:** $Max = |A| + C$ $\qquad min = -|A| + C$

**نکته: محاسبه دوره تناوب به کمک ضابطه:** $T = \frac{2\pi}{|B|}$

۷۹- دوره تناوب، ماکسیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید.

۱) $y = \overset{A}{3}\cos \overset{B}{4}x + \overset{C}{1}$ $\begin{cases} Max = |3| + 1 = 4 \\ min = -|3| + 1 = -2 \end{cases}$ $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

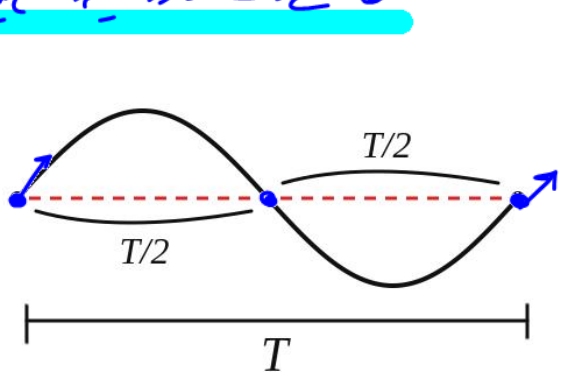
۲) $y = \overset{A}{-3}\cos \overset{B}{\pi}x + \overset{C}{1}$ $\begin{cases} Max = |-3| + 1 = 4 \\ min = -|-3| + 1 = -2 \end{cases}$ $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

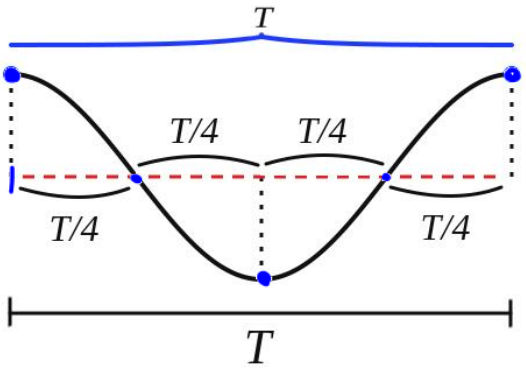
۳) $y = \overset{A}{\sqrt{2}} \sin \overset{B}{\frac{1}{2}x} \overset{C}{- 1}$

$\begin{cases} Max = \sqrt{2} - 1 \\ min = -\sqrt{2} - 1 \end{cases}$ $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

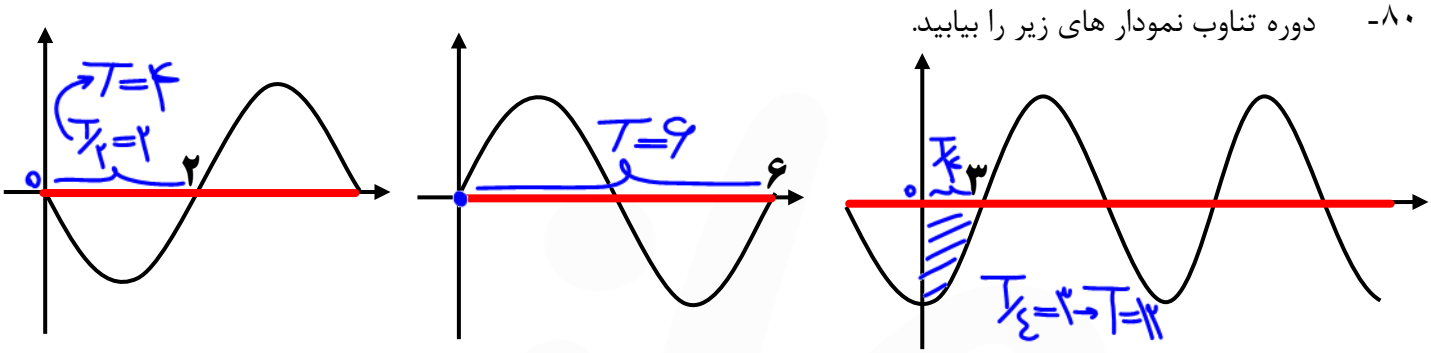
## محاسبه دوره تناوب به کمک نمودار

- **دوره تناوب فاصله بین دو نقطه هم فاز روی نمودار مثلثاتی سینوس و کسینوس است.**
- **دوره تناوب فاصله دو نقطه ماکسیمم متوالی یا مینیمم متوالی است.**



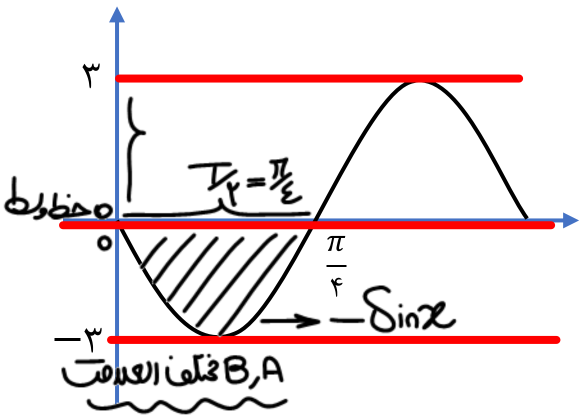

۸۰- دوره تناوب نمودار های زیر را بیابید.




**طریقه پیدا کردن معادله سینوس و کسینوس از روی نمودار**

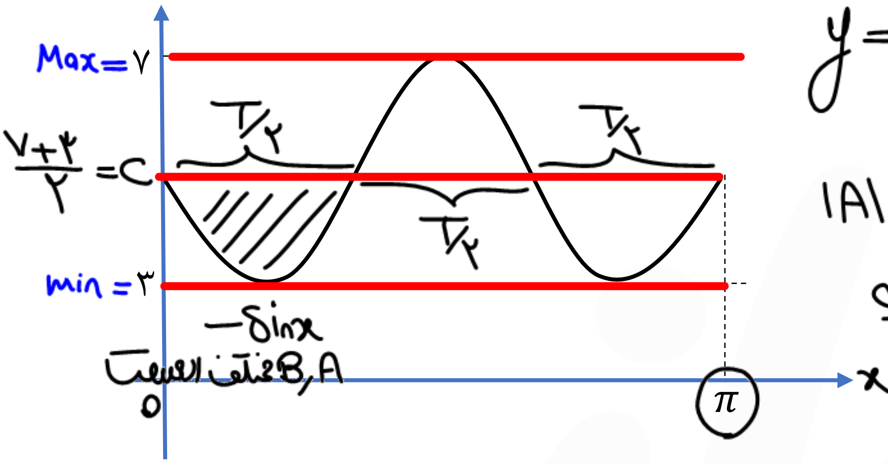
۸۱- معادله نمودارهای زیر را بیابید.

الف)



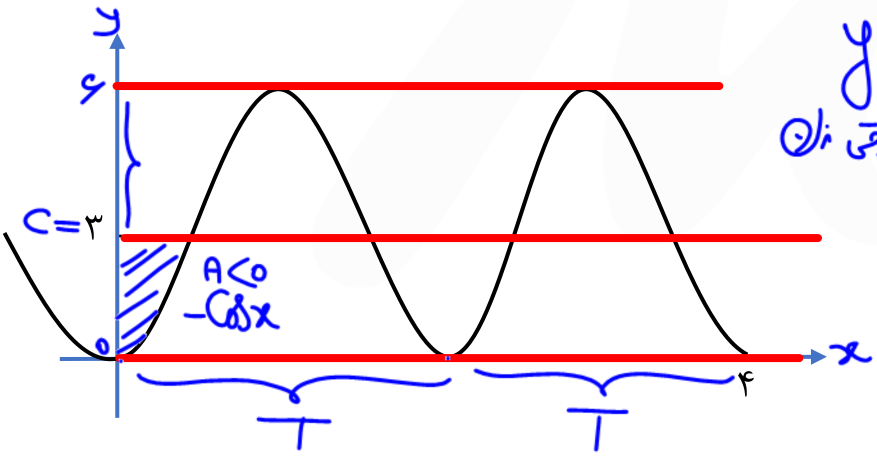
$$y=-3\sin(4x)+0$$
$$+3\sin(-4x)+0$$
$$T=\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{|B|}\rightarrow |B|=4$$

ب)



$$y=-2\sin(3x)+5$$
$$2\sin(-3x)+5$$
$$|A|=\frac{7-3}{2}=2$$
$$\frac{3T}{2}=\frac{\pi}{1}\rightarrow 3T=2\pi\rightarrow T=\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{|B|}$$
$$|B|=3$$

ج)

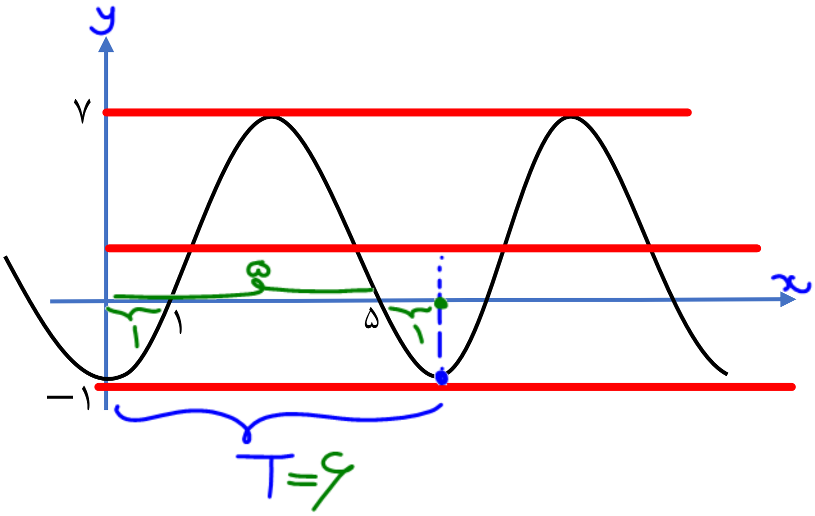


$$y=-3\cos(\pm\pi x)+3$$

علامت درون Cos ⊕ و ⊖ فرقی ندارد

$$2T=4\rightarrow T=2=\frac{2\pi}{|B|}$$
$$|B|=\pi$$

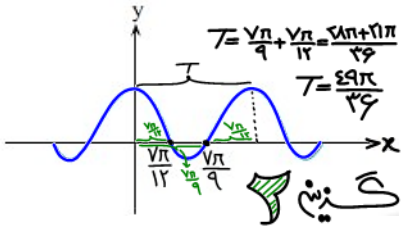
د)



$$y=-4\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}x\right)+3$$
$$C=\frac{Max+min}{2}=\frac{7+(-1)}{2}=3$$
$$|A|=\frac{Max-min}{2}=\frac{7-(-1)}{2}=4$$
$$T=6=\frac{2\pi}{|B|}\rightarrow 3|B|=\pi\rightarrow |B|=\frac{\pi}{3}$$

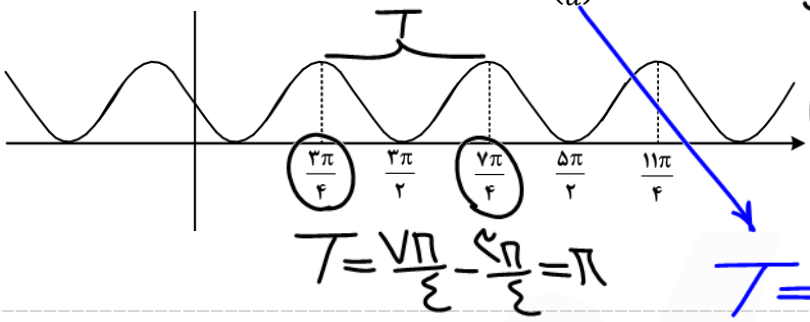
## تیپ اول: سوالاتی در مورد دوره تناوب

۸۲- در شکل مقابل، قسمتی از نمودار $y = a\cos bx + c$ رسم شده است. دوره تناوب این تابع کدام است؟ (قلمچی)



۱) $\frac{۷\pi}{۳۶}$
۲) $\frac{۴۹\pi}{۳۶}$
۳) $\frac{۷\pi}{۱۸}$
۴) $\frac{۴۹\pi}{۱۸}$

۸۳- شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ + \sin ax$ است. دوره تناوب $y = ۳\cos\left(\frac{x}{a}\right)$ کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۳ تجربی)



۱) $۴\pi$
۲) $۶\pi$
۳) $۲\pi$
۴) $۳\pi$

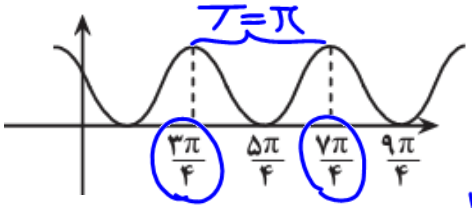
۸۴- دوره تناوب $f(x) = \frac{۱}{۲} - ۳\sin\frac{\pi}{a}x$ برابر $\frac{\pi}{۲}$ است. دوره تناوب تابع $-۳f(۲x)$ کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۳ تجربی)

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\pi$
۴) $\frac{\pi}{۴}$

۸۵- دوره تناوب $f(x) = \frac{۱}{۲} - \sin\frac{۲x}{a}$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ است. دوره تناوب $y = \cos ax$ کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۳ تجربی)

۱) $۴\pi$
۲) $۶\pi$
۳) $۲\pi$
۴) $۳\pi$

۸۶- شکل زیر، نمودار تابع $y = ۱ + \sin\left(\frac{x}{a}\right)$ است. دوره تناوب $y = ۳\cos^۲(ax)$ کدام است؟ (قلم چی)

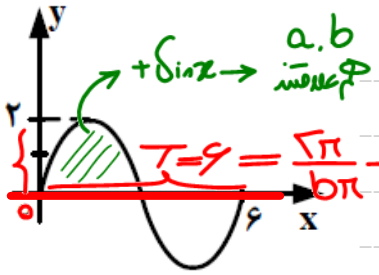


۱) $\frac{\pi}{۲}$
۲) $\pi$
۳) $۲\pi$
۴) $۴\pi$

**تیپ دوم: سوالاتی که ماکسیمم، مینیمم، دوره تناوب داده شده باشد.**

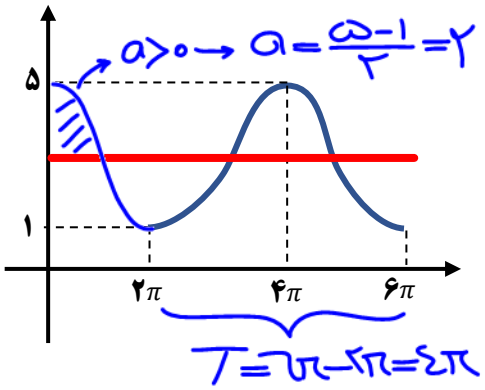
۸۷- شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin b\pi x$ است. $a+b$ کدام است؟ (سراسری)

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$



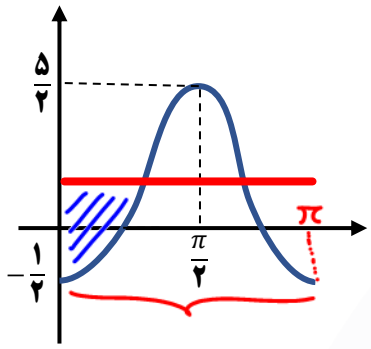

۸۸- شکل روبرو نمودار تابع $y = c + a\cos bx$ را در یک دوره تناوب نشان می دهد، مقدار $c$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۱)

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱



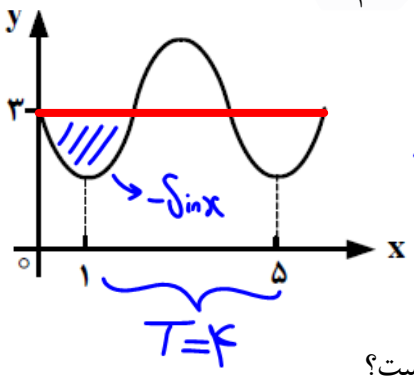

۸۹- شکل روبرو نمودار تابع $y = c + a\cos bx$ را در یک دوره تناوب نشان می دهد، مقدار $ac$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۱)

۱) $-۵$ ۲) $-۳$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$



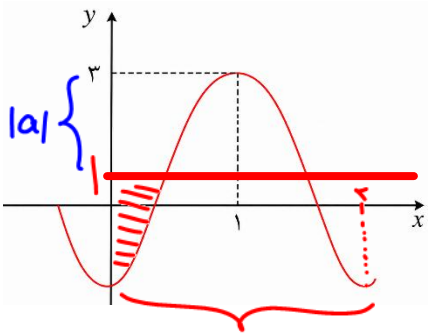

۹۰- شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin b\pi x$ است. مقدار $y$ در نقطه‌ی $x = \frac{۲۵}{۳}$ کدام است؟ (سراسری)

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

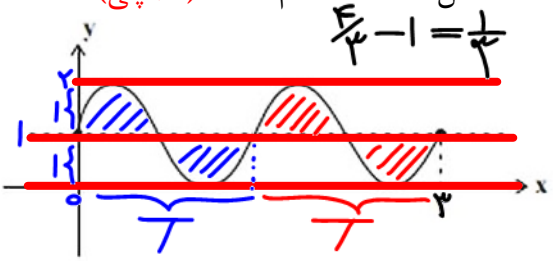



۹۱- اگر قسمتی از نمودار $y = ۱ + a\cos b\pi x$ به صورت مقابل باشد، $a$ کدام است؟

۱) $-۲$ ۲) ۲ ۳) $-۱$ ۴) $-۳$

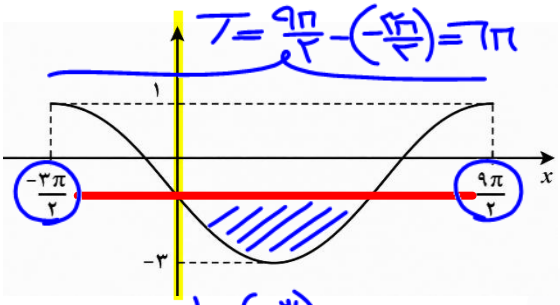


۹۲- اگر تابع $f(x) = a + \sin b\pi x$ در بازه $[0,3]$ به صورت زیر باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟ (قلمچی)



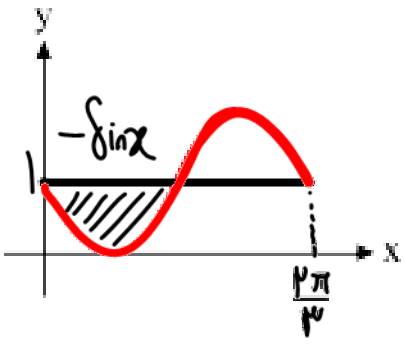
۱) $\frac{4}{3}$
۲) $\frac{2}{3}$
۳) $\frac{1}{3}$
۴) $\frac{5}{3}$

۹۳- شکل زیر، نمودار تابع $y = a\sin bx + c$ را در یک بازه تناوب نشان می دهد. نسبت $\frac{b}{a}$ کدام است؟ (سراسری ۹۹)



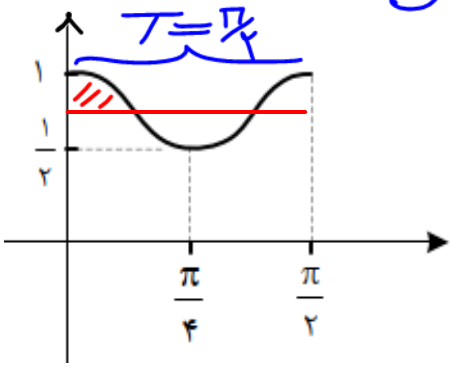
۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{1}{3}$
۳) $-\frac{1}{4}$
۴) $-\frac{1}{6}$

۹۴- شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است، مقدار تابع در $x = \frac{7\pi}{6}$ کدام است؟



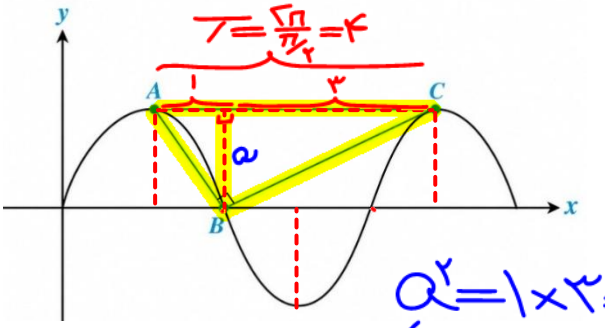
۱) صفر
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۱
۴) ۲

۹۵- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = c + a\cos bx$ را نشان می دهد. مقدار $bc$ کدام است؟ (آزمون مجدد تجربی)

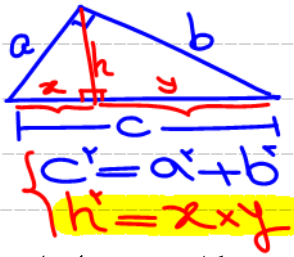


۱) $-3$
۲) $-1$
۳) ۱
۴) ۳

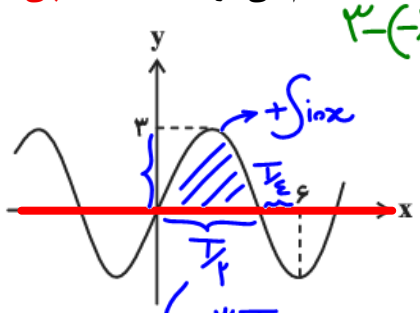
۹۶- در شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(\frac{\pi}{۲}x)$ رسم شده است. به ازای کدام مقدار $a$ مثلث $ABC$ قائم الزاویه است؟




۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲
۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۳



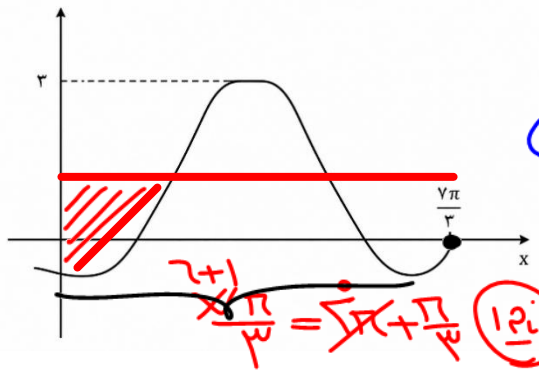

۹۷- شکل زیر نمودار تابع $y = a\cos(\frac{\pi}{۲}(bx+۱))$ را نشان می دهد. مقدار $a-b$ کدام می تواند باشد؟(قلمچی)




۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

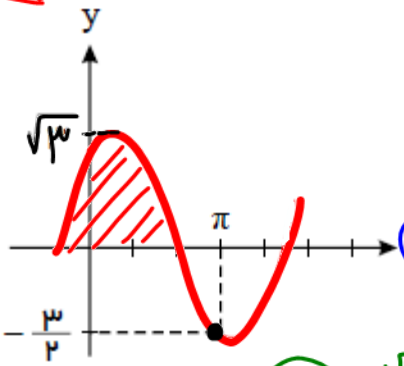
**تیپ سوم: سوالاتی که ماکسیمم یا مینیمم به همراه یک نقطه داده شود.**

۹۸- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$ است. مقدار $b$ کدام است؟ (سراسری ۹۹)



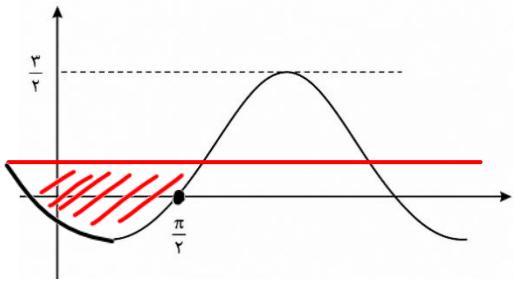

۱) ۲ ۲) ۱
۳) $-۱$ ۴) $-۲$

۹۹- شکل زیر قسمتی از نمودار $y = a + b\sin(x+\frac{\pi}{۳})$ است. در این صورت $b$ کدام است؟ (سراسری ۹۸) معین



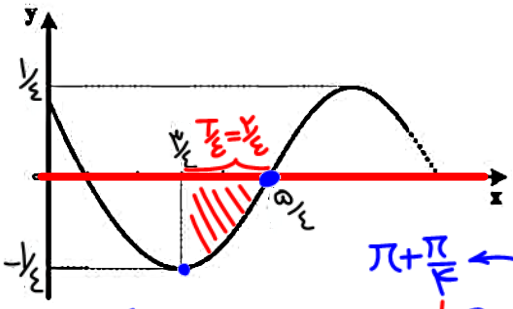

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۱۰۰- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b\sin(\frac{\pi}{۳} + x)$ است. مقدار $a$ کدام است؟ (سراسری ۹۹)



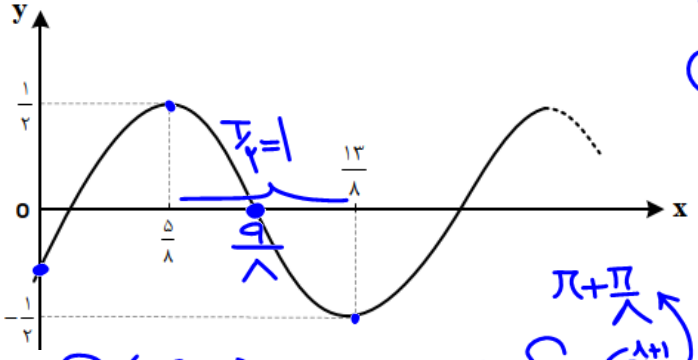
۱) $-۱$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $۱$

۱۰۱- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a\cos(bx + c)$ را نشان می دهد. اگر $b > ۰$ و $۰ < c < \pi$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۱ ریاضی)



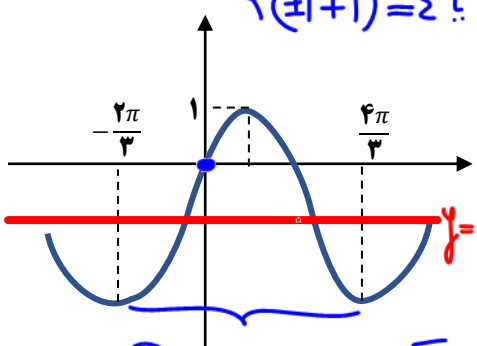
۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $۱$ ۳) $\frac{۱}{۴\pi}$ ۴) $\pi$

۱۰۲- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a\sin(bx - c)$ را نشان می دهد. اگر $a > ۰$ و $b > ۰$ و $۰ < c < \pi$ مقدار $\frac{ab}{c}$ کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۱)



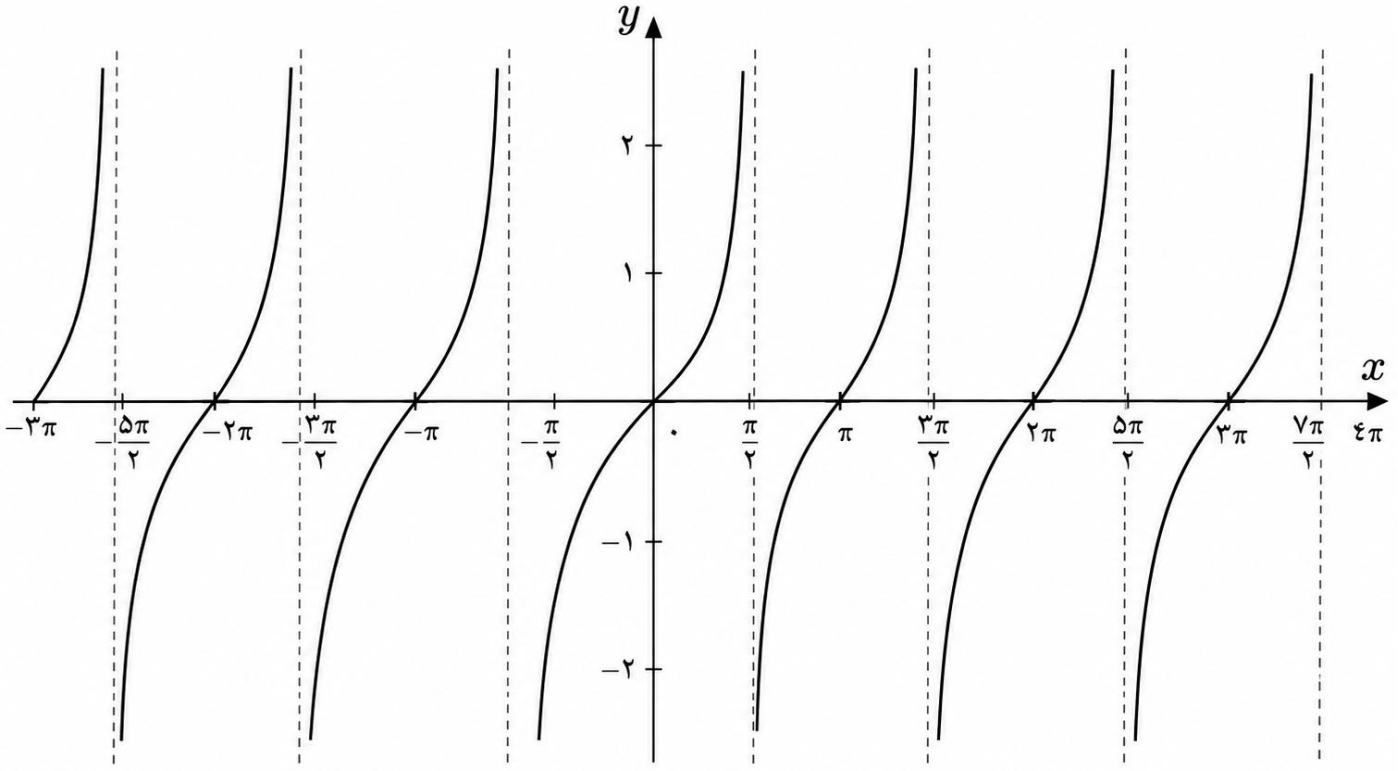
۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{\pi}$ ۴) $۲\pi$

۱۰۳- شکل زیر، قسمتی از نمودار $y = a + b\cos(cx - \frac{\pi}{۳})$ را نشان می دهد. مقدار $b(c - a)$ کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۲)



۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

**تابع تانژانت** $y = \tan x$




- **مجانب های قائم:** $x = \pm\frac{\pi}{۲}, \pm\frac{۳\pi}{۲}, \pm\frac{۵\pi}{۲}, \ldots$
- **مجانب های قائم در دامنه نیستند.**
- **دوره تناوب برابر فاصله بین دو مجانب قائم است که برابر** $\pi$ **است.**
- **دامنه برابر** $D = \left\{x | x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{۲} + k\pi\right\}$ **و برد برابر** $R = \mathbb{R}$ **است.**
- **تابع تانژانت غیریکنوا است، در هیچ بازه ای نزولی نیست، در بازه ای که تعریف شده باشد صعودی است.**

**توجه: در تابع** $y = A\tan(Bx + C) + D$ **داریم:**

- **اگر** $A \times B > ۰$ **تابع صعودی است و اگر** $A \times B < ۰$ **تابع نزولی است.**
- **فاصله بین دو مجانب قائم متوالی = فاصله بین دو نقطه هم عرض متوالی =** $T = \frac{\pi}{|B|}$